Europ. J. Combinatorics (1986) 7, 141–149

Subdivision des Nombres de Narayana suivant deux Paramètres Supplémentaires

GERMAIN KREWERAS ET YVES POUPARD*

In any n-bridge, apart from the parameter p (total number of jumps or of landings), which is known to be distributed according to the Narayana law, the paper introduces two additional parameters i and j, respectively defined as the number of long jumps and the number of long non-final landings (*long* means consisting of at least two steps). It is shown that the number of n-bridges with prescribed p, i and j is a remarkably simple monomial function $D(n, p, i, j)$. The proof makes use of the auxiliary concept of 'pseudo-bridge' and is mainly combinatorial but also partly analytical.

1. PRÉSENTATION

Dans tout ce qui suit nous appelons *pont de portée n* (cf. [4], [2]) un mot de $2n$ lettres écrit avec l'alphabet $\{a, b\}$, employant n fois chacune des deux lettres, et tel que, $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, le k-ième a apparaisse avant le k-ième b.

Dans tout pont P, nous appelons *saut* (resp. *palier*) toute succession maximale, au sens de l'inclusion, de lettres a (resp. b), laquelle pourra être notée à l'aide d'un exposant approprié; celui-ci sera la *longueur* du saut (resp. palier) correspondant. Un pont est donc toujours une alternance de p sauts et de p paliers.

Il est bien connu que le nombre de ponts de portée n ayant p paliers (ou p sauts) est égal à

$$\frac{1}{n}\binom{n}{p}\binom{n}{p-1};$$

ces nombres sont appelés 'nombres de Narayana' ou parfois 'nombres de Runyon' ([5], p. 17).

Les sauts ou les paliers seront dits *longs* ou *courts* suivant que leurs longueurs sont $\geqslant 2$ ou égales à 1.

Un rôle particulier sera joué ici par les paramètres descriptifs 'nombre de sauts longs' et nombre de paliers *non-terminaux* longs' (le dernier palier, ou palier terminal, même s'il est long, *n'est pas* compté).

Il a été établi récemment [3] que le paramètre $k = i + j$ (pour n donné mais p non spécifié) est distribué lui aussi suivant la 'loi de Narayana'. Dans ce qui suit on étudie la loi de distribution croisée des *trois* paramètres p, i et j. Plus précisément, si l'on appelle $\mathscr{P}(n, p, i, j)$ l'ensemble des ponts de portée n présentant p paliers, i sauts longs et j paliers non-terminaux longs, le but du préset article est de montrer que le cardinal de $\mathscr{P}(n, p, i, j)$ a une expression monôme particulièrement simple, à savoir

$$|\mathscr{P}(n, p, i, j)| = \frac{1}{p}\binom{p}{i}\binom{p}{j+1}\binom{n-p-1}{i-1}\binom{n-p}{j}.$$

Pour ce faire, on aura notamment besoin d'introduire les ensembles respectifs $\Pi(s, t)$ et $\Pi^*(s, t)$ des t-compositions et des t-pseudo-compositions d'un entier s, c'est-à-dire (conformément au langage employé dans [1], p. 132) l'ensemble des suites de s entiers

* Yves Poupard, qui était un combinatoriste de très grand talent, a trouvé une mort tragique à 49 ans, le 31 août 1985, dans un accident de chemin de fer.

0195-6698/86/020141+09 $02.00/0 © 1986 Academic Press Inc. (London) Limited

de somme t, où les s entiers en question sont astreints à être non-négatifs pour Π et positifs pour Π^*. Il est bien connu que

$$|\Pi(s,t)| = \binom{s+t-1}{t-1} \quad \text{et} \quad |\Pi^*(s,t)| = \binom{s-1}{t-1}.$$

On sera amené en particulier à considérer, pour des valeurs appropriées des entiers u et v, les trois ensembles

$$\Pi(p-i-j+v, i+j+1), \qquad \Pi^*(n-p+u, i+j) \quad \text{et} \quad \mathscr{P}(i+j, i, u, v)$$

ainsi que la réunion des produits cartésiens

$$\mathscr{R} = \bigcup_{(u,v)} \Pi(p-i-j+v, i+j+1) \times \Pi^*(n-p+u, i+j) \times \mathscr{P}(i+j, i, u, v),$$

la réunion étant étendue à tous les couples (u, v) qui rendent non-vide le produit cartésien sous le signe $\bigcup$.

Le point central de la méthode utilisée consistera à construire d'abord une bijection particulière de $\mathscr{P}(n, p, i, j)$ dans $\mathscr{R}$; ce sera l'objet du § 3. Ainsi par exemple au pont P défini par

$$P = (\mathrm{ababa^2ba^5ba^3bab^4a^3ba^2b^2ab^4a^4b^5abab^3}) \in \mathscr{P}(25, 12, 6, 4)$$

on sera amené à faire correspondre le tiplet (Y, Z, P'), avec

$$Y = (2\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1),$$
$$Z = (1\,2\,2\,1\,1\,2\,2\,1\,3\,1),$$
$$P' = (\mathrm{aba^3ba^2b^2abab^3a^2b^2}),$$

pour lequel

$$Y \in \Pi(4, 11) = \Pi(12-6-4+v, 6+4+1), \qquad \text{avec } v = 2,$$
$$Z \in \Pi^*(16, 10) = \Pi^*(25-12+u, 6+4), \qquad \text{avec } u = 3,$$
$$P' \in \mathscr{P}(10, 6, 3, 2) = \mathscr{P}(6+4, 6, 3, 2).$$

Avant cette construction on aura introduit au § 2 la notion de *pseudo-pont* et plusiers notions annexes qui jouent un rôle important dans la démonstration. Le § 4 permettra enfin d'établir le résultat annoncé.

2. Les 'pseudo-ponts'

2.1. Par définition nous appellerons *pseudo-pont* toute suite finie d'entiers *non-nuls* telle que pour tout λ la somme des λ premiers d'entre eux soit *non-négative*.
Exemples de pseudo-ponts:

$$Q_1 = (1\ {-1}\ 1\ {-1}\ 2\ {-1}\ 5\ {-1}\ 3\ {-1}\ 1\ {-4}\ 3\ {-1}\ 2\ {-2}\ 1\ {-4}\ 4\ {-5}\ 1\ {-1}\ 1),$$
$$Q_2 = (1\ 4\ 2\ {-3}\ 2\ 1\ {-1}\ {-3}\ 3\ {-4}),$$
$$Q_3 = (1\ 4\ {-3}\ {-1}\ 2\ {-3}\ 2\ 1\ 3\ {-4}),$$
$$Q_4 = (1\ {-1}\ 3\ {-1}\ 2\ {-2}\ 1\ {-1}\ 1\ {-3}\ 2).$$

2.2. Pour tout pseudo-pont Q, nous conviendrons des définitions et notations suivantes:
(a) la *longueur* de Q, notée $l(Q)$, est le nombre total de termes,

(b) la *forme* de Q, notée $F(Q)$, est l'ensemble des rangs des termes positifs de Q; on a évidemment $1 \in F(Q)\ \forall Q$. On notera $|F(Q)| = f(Q)$.
On appellera $G(Q)$ l'ensemble $\{1, 2, \ldots, l\} - F(Q)$, et l'on notera $|G(Q)| = g(Q)$; d'où $f(Q) + g(Q) = l(Q) = l$.
(c) la *portée* de Q, notée $s(Q)$, est la somme des termes positifs de Q; on a évidemment $s(Q) \geqslant f(Q)$.

Si l'on considère un pseudo-pont de longeur l, soit $Q = (x_1 x_2 \cdots x_l)$, on a donc

$$F(Q) = \{\lambda \mid x_\lambda \geqslant 1\}, \qquad G(Q) = \{\lambda \mid x_\lambda \leqslant -1\}, \qquad s(Q) = \sum_{\lambda \in F(Q)} x_\lambda.$$

Exemples:

$$l(Q_1) = 23 \qquad l(Q_2) = 10 \qquad l(Q_3) = 10 \qquad l(Q_4) = 11$$

$F(Q_1) = \{1\ 3\ 5\ 7\ 9\ 11\ 13\ 15\ 17\ 19\ 21\ 23\}$	$f(Q_1) = 12$	$s(Q_1) = 25$
$G(Q_1) = \{2\ 4\ 6\ 8\ 10\ 12\ 14\ 16\ 18\ 20\ 22\}$	$g(Q_1) = 11$	
$F(Q_2) = \{1\ 2\ 3\ 5\ 6\ 9\}$	$f(Q_2) = 6$	$s(Q_2) = 13$
$G(Q_2) = \{4\ 7\ 8\ 10\}$	$g(Q_2) = 4$	
$F(Q_3) = \{1\ 2\ 5\ 7\ 8\ 9\}$	$f(Q_3) = 6$	$s(Q_3) = 13$
$G(Q_3) = \{3\ 4\ 6\ 10\}$	$g(Q_3) = 4$	
$F(Q_4) = \{1\ 3\ 5\ 7\ 9\ 11\}$	$f(Q_4) = 6$	$s(Q_4) = 10$
$G(Q_4) = \{2\ 4\ 6\ 8\ 10\}$	$g(Q_4) = 5$	

2.3 On considèrera également à l'occasion les parties suivantes de $\{1, 2, \ldots, l\}$:

$$F^*(Q) = \{\lambda \mid x_\lambda \geqslant 2\}, \qquad G^*(Q) = \{\lambda \mid x_\lambda \leqslant -2\},$$
$$F^-(Q) = \{\lambda \mid \lambda \in F(Q), \lambda + 1 \in G(Q)\}, \qquad F^+(Q) = F(Q) - F^-(Q),$$
$$G^+(Q) = \{\lambda \mid \lambda \in G(Q), \lambda + 1 \in F(Q)\}, \qquad G^-(Q) = G(Q) - G^+(Q).$$

Nous désignerons par les lettres f, g convenablement accentuées les cardinaux correspondants.

Exemples:

$F^*(Q_1) = \{5, 7, 9, 13, 15, 19\}$	$f^*(Q_1) = 6$
$G^*(Q_1) = \{12, 16, 18, 20\}$	$g^*(Q_1) = 4$
$F^*(Q_4) = \{3, 5, 11\}$	$f^*(Q_4) = 3$
$G^*(Q_4) = \{6, 10\}$	$g^*(Q_4) = 2$
$F^-(Q_2) = \{3, 6, 9\}$	
$F^+(Q_2) = \{1, 2, 5\}$	
$G^+(Q_2) = \{4, 8\}$	$g^+(Q_2) = 2$
$G^-(Q_2) = \{7, 10\}$	
$F^-(Q_3) = \{2, 5, 9\}$	$f^-(Q_3) = 3$
$F^+(Q_3) = \{1, 7, 8\}$	

2.4. *Pseudo-ponts particuliers*

Un pseudo-pont $Q=(x_1 \cdots x_l)$ peut avoir comme propriété particulière d'être 'alterné' ou d'être 'saturé'.

2.4.1. Q sera dit *alterné* si tous ses termes positifs et eux seuls sont de rang impair: $\lambda \in F(Q) \Leftrightarrow \lambda$ impair (exemples Q_1 et Q_4 ci-dessus). A partir d'un pseudo-pont alterné ayant $2p-1$ termes, on peut en ajoutant à la fin un $(2p)$-ième terme, qui sera négatif, former un pseudo-pont dont la somme des termes est nulle. La donnée d'un tel pseudo-pont alterné équivaut à la donnée d'un *pont* de même portée.

2.4.2. Q sera dit *saturé* si, lorsqu'un terme positif est immédiatement suivi d'un terme négatif, il est impossible de permuter ces deux termes sans que la suite cesse d'être un pseudo-pont: $\forall \lambda \in F^-(Q)$, $\sum_{\rho=1}^{\lambda+1} x_\rho < x_\lambda$ (exemple Q_3 ci-dessus). On verra plus loin qu'étant donné un pseudo-pont quelconque, il existe un pseudo-pont et un seul qui soit à la fois composé des mêmes termes et saturé.

3. Bijection centrale

1ère étape. On part d'un pont $P \in \mathcal{P}(n, p, i, j)$ et l'on construit un pseudo-pont alterné $T_1(P)$ de longueur $2p-1$, défini comme suit:

$$T_1(P) = (x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{1,2p-1})$$

avec, $\forall \rho \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $x_{1,2\rho-1}$ = longueur du ρième saut de P

$\forall \rho \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, $x_{1,2\rho}$ = *moins* la longeur du ρième palier de P

Dans les exemples ci-dessus, on a $T_1(P) = Q_1$.

Remarque 1. Notons que l'on a $f(T_1(P)) = p$ et $g(T_1(P)) = p-1$, d'où, comme annoncé, $l(T_1(P)) = 2p-1$.

On a aussi $f^*(T_1(P)) = i$, $g^*(T_1(P)) = j$ et $s(T_1(P)) = n$.

Remarque 2. La connaissance de $T_1(P)$ équivaut à celle de P; on note que la longeur du palier terminal de P est égale à x_1, somme qui est stictement positive.

2ème étape

(1°) Au pseudo-pont $T_1(P)$ résultant de la 1ère étape on fait correspondre une suite $T_1'(P)$ de même longeur que $T_1(P)$:

$$T_1'(P) = (x_{1,1}', x_{1,2}', \ldots, x_{1,2p-1}')$$

telle que

$$x_{1,2\rho-1}' = x_{1,2\rho-1} - 1,$$

$$x_{1,2\rho}' = x_{1,2\rho} + 1.$$

Cette suite est ou n'est pas un pseudo-pont selon qu'elle n'a pas ou qu'elle a un ou plusieurs termes nuls.

(2°) De la suite $T_1'(P)$ on extrait la suite obtenue par suppression de tous les termes nuls; on obtient ainsi un pseudo-pont $T_2(P)$. Dans les exemples ci-dessus, on a $T_2(P) = Q_2$.

Remarque 3. On a

$$f(T_2(P)) = f^*(T_1(P)) = i,$$

$$g(T_2(P)) = g^*(T_1(P)) = j,$$

d'où

$$l(T_2(P)) = i + j.$$

On a aussi

$$s(T_2(P)) = s(T_1(P)) - p = n - p.$$

REMARQUE 4. La connaissance de $T_2(P)$ ne permet pas en général de reconstituer $T_1(P)$.

3ème étape

(1°) Au pseudo-pont $T_1(P)$ on fait correspondre une suite $S_1'(P)$ de $i+j+1$ entiers non-négatifs,

$$S_1'(P) = (y_0' y_1' \cdots y_{i+j}'),$$

définie comme suit.

Si $F^*(T_1(P)) \cup G^*(T_1(P)) = \{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_{i+j}\}$, avec $1 \leqslant \rho_1 < \rho_2 < \cdots \rho_{i+j} \leqslant 2p-1$, et si, de plus, on pose $\rho_0 = 0$ et $\rho_{i+j+1} = 2p$, alors y_λ' = nombre de termes de $T_1(P)$ égaux à 1 et de rang strictement compris entre ρ_λ et $\rho_{\lambda+1}$ ($\lambda = 0, 1, \ldots, i+j$).

REMARQUE 5. $\sum_{\lambda=0}^{i+j} y_\lambda' = p - i$ (nombre de sauts 'courts' du pont P).

REMARQUE 6. Pour $\lambda \in \{0\} \cup F^-(T_2(P)) \cup G^+(T_2(P))$, on a

$$\rho_{\lambda+1} - \rho_\lambda - 1 = 2y_\lambda', \qquad \text{avec } y_\lambda' \geqslant 0.$$

Pour $\lambda \in F^+(T_2(P))$, on a

$$\rho_{\lambda+1} - \rho_\lambda - 1 = 2y_\lambda' + 1, \qquad \text{avec } y_\lambda' \geqslant 0.$$

Pour $\lambda \in G^-(T_2(P))$, on a

$$\rho_{\lambda+1} - \rho_\lambda - 1 = 2y_\lambda' - 1, \qquad \text{avec } y_\lambda' \geqslant 1.$$

(2°) A la suite $S_1'(P)$ on associe une suite $S_1(P)$ de même longeur,

$$S_1(P) = (y_0 y_1 \cdots y_{i+j}),$$

telle que

$$y_\lambda = y_\lambda' \quad \text{si} \quad \lambda \notin G^-(T_2(P)),$$
$$y_\lambda = y_\lambda' - 1 \quad \text{si} \quad \lambda \in G^-(T_2(P)).$$

Avec les exemples du § 1, on peut vérifier que $S_1(P) = Y$.

REMARQUE 7.

$$\sum_{\lambda=0}^{i+j} y_\lambda = \sum_{\lambda=0}^{i+j} y' - g^-(T_2(P)) = p - i - (j - v), \text{ où } v = g^+(T_2(P)).$$

$S_1(P)$ est donc une $(i+j+1)$-pseudo-composition de l'entier $p - i - j + v$.

REMARQUE 8. On a toujours

$$y_\lambda = \left\lfloor \frac{\rho_{\lambda+1} - \rho_\lambda - 1}{2} \right\rfloor.$$

Plus précisément pour $\lambda \in \{0\} \cup F^-(T_2(P)) \cup G^+(T_2(P))$, on a $\rho_{\lambda+1} = \rho_\lambda + 2y_\lambda + 1$, et pour $\lambda \in F^+(T_2(P)) \cup G^-(T_2(P))$, on a $\rho_{\lambda+1} = \rho_\lambda + 2y_\lambda + 2$.

REMARQUE 9. Il est aisé de s'assurer que la connaissance simultanée de $T_2(P)$ et de $S_1(P)$ permet de reconstituer $T_1(P)$.

4ème étape. Au pseudo-pont $T_2(P)$ résultant de la 2ème étape on associe le pseudo-pont saturé $T_3(P)$ ayant les mêmes suites extraites de termes positifs et de termes négatifs. Exemple: pour $T_2(P)=Q_2$, on a $T_3(P)=Q_3$.

REMARQUE 10. On a toujours

$$f(T_3(P))=f(T_2(P))=i$$

et

$$g(T_3(P))=g(T_2(P))=j,$$

d'où

$$l(T_3(P))=l(T_2(P))=i+j.$$

D'autre part $s(T_3(P))=s(T_2(P))=n-p$.

REMARQUE 11. On peut reconstituer $T_2(P)$ si l'on connaît $F(T_2(P))$ et $T_3(P)$.

5ème étape. Au couple $(T_2(P), T_3(P))$ on associe le pseudo-pont $T_4(P)$ obtenu comme suit.

Soit

$$F(T_2(P))=\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i\} \text{ avec } 1=\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_i\leqslant i+j$$

et

$$F(T_3(P))=\{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_i\} \text{ avec } 1=\nu_1<\nu_2<\cdots<\nu_i\leqslant i+j.$$

(on a toujours par construction $\mu_\rho\leqslant\nu_\rho$). On peut poser en outre $\nu_{i+1}=i+j+1$. $T_4(P)$ sera par définition le pseudo-pont *alterné* de longueur $2i-1$,

$$T_4(P)=(x_{4,1}, x_{4,2}, \ldots, x_{4,2i-1}),$$

où

$$x_{4,2\rho-1}=\nu_{\rho+1}-\nu_\rho \qquad \forall\rho\in\{1,2,\ldots,i\}$$

et

$$x_{4,2\rho}=\mu_\rho-\mu_{\rho+1} \qquad \forall\rho\in\{1,2,\ldots,i-1\}.$$

Dans le cas des exemples choisis plus haut, on a $T_4(P)=Q_4$.

REMARQUE 12.

$$s(T_4(P))=\sum_{\lambda\in F(T_4(P))} x_{4,\lambda}=\sum_{\rho=1}^{i} x_{4,2\rho-1}=\nu_{i+1}-\nu_1=i+j.$$

REMARQUE 13.

$$\nu_{\rho+1}-\nu_\rho\geqslant 2 \Leftrightarrow \nu_\rho\in F^-(T_3(P))$$
$$\mu_\rho-\mu_{\rho+1}\leqslant -2 \Leftrightarrow \mu_{\rho+1}-1\in G^+(T_2(P));$$

par conséquent

$$f^*(T_4(P))=f^-(T_3(P))$$

et

$$g^*(T_4(P)) = g^+(T_2(P)) = v.$$

Remarque 14. La connaissance de $T_4(P)$ permet de reconstituer $F(T_2(P))$ et $F(T_3(P))$.

6ème étape. Au pseudo-pont alterné $T_4(P)$ correspond évidemment un pont P' dont les sauts ont pour longueurs les termes positifs de $T_4(P)$, et dont les paliers non-terminaux ont pour longueurs les valeurs absolues des termes négatifs de $T_4(P)$. P' a pour portée $i+j$ (remarque 12); son nombre de paliers est i. D'autre part (remarque 13) le nombre u de sauts longs est $u = f^-(T_3(P))$ et le nombre v de paliers non-terminaux longs est $v = g^+(T_2(P))$. On a ainsi

$$P' \in \mathcal{P}(i+j, i, u, v).$$

7ème étape. Au pseudo-pont

$$T_3(P) = (x_{3,1}, x_{3,2}, \ldots, x_{3,i+j})$$

on fait d'autre part correspondre une suite $S_2(P) = (z_1 z_2 \cdots z_{i+j})$ de $i+j$ entiers positifs telle que les termes dont le rang appartient au segment $[\nu_\rho, \nu_{\rho+1}-1]$, avec $1 \leqslant \rho \leqslant i$, se définissent comme suit:

(1°) Si $\nu_\rho \in F^+(T_3(P))$, $(\nu_{\rho+1} - \nu_\rho = 1)$

$$z_{\nu_\rho} = x_{3,\nu_\rho}$$

(2°) Si $\nu_\rho \in F^-(T_3(P))$, $(\nu_{\rho+1} - \nu_\rho \geqslant 2)$

$$z_{\nu_\rho} = 1 + \sum_{\lambda=1}^{\nu_{\rho+1}-1} x_{3,\lambda}$$

$$z_{\nu_\rho+1} = x_{3,\nu_\rho} - \sum_{\lambda=1}^{\nu_\rho+1} x_{3,\lambda},$$

et, si $\nu_{\rho+1} - \nu_\rho \geqslant 3$,

$$z_\lambda = -x_{3,\lambda}, \qquad \forall \lambda \in [\nu_\rho + 2, \nu_{\rho+1} - 1].$$

Avec les exemples introduits plus haut, on a $S_2(P) = Z$.

Remarque 15. On a toujours

$$\sum_{\lambda=\nu_\rho}^{\nu_{\rho+1}-1} z_\lambda = \begin{cases} x_{3,\nu_\rho} & \text{si} \quad \nu_\rho \in F^+(T_3(P)), \\ x_{3,\nu_\rho}+1 & \text{si} \quad \nu_\rho \in F^-(T_3(P)). \end{cases}$$

Par conséquent on peut écrire successivement

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^{i+j} z_\lambda &= \sum_{\lambda \in F(T_3(P))} x_{3,\lambda} + f^-(T_3(P)) \\ &= s(T_3(P)) + f^-(T_3(P)) \\ &= n - p + u. \end{aligned}$$

$S_2(P)$ est donc bien une $(i+j)$-composition de $n-p+u$.

Remarque 16. La connaissance simultanée de $S_2(P)$ et de $F(T_3(P))$ permet de reconstituer $T_3(P)$.

On a finalement ainsi établi l'existence d'une bijection de $\mathscr{P}(n, p, i, j)$ sur la réunion $R = \bigcup_{(u,v)} \Pi(p-i-j+v, i+j+1) \times \Pi^*(n-p+u, i+j) \times \mathscr{P}(i+j, i, u, v)$.

4. Conséquence

Si l'on appelle $D(n, p, i, j)$ le cardinal de $\mathscr{P}(n, p, i, j)$, la bijection construite a pour conséquence l'égalité

$$D(n, p, i, j) = \sum_{(u,v)} \binom{p+v}{i+j} \binom{n-p+u-1}{i+j-1} D(i+j, i, u, v). \tag{1}$$

Notons que les définitions mêmes de i et j impliquent que $2i \leqslant n$ et $2j \leqslant n-1$, ce qui entraîne que $i+j \leqslant n-1$; la formule (1) est donc une récurrence permettant de calculer de proche les valeurs de D considéré comme fonction de son premier argument.

Nous allons donner de D une expression *monôme* simple en fonction de ses quatre arguments, à savoir

$$D'(n, p, i, j) = \frac{1}{p} \binom{p}{i} \binom{p}{j+1} \binom{n-p-1}{i-1} \binom{n-p}{j}. \tag{2}$$

Pour montrer que l'on a toujours $D = D'$, nous raisonnerons par *récurrence sur n*, après vérifications triviales pour $n = 0$ et $n = 1$. La démonstration revient alors à vérifier que l'expression (2) satisfait à la même récurrence que (1), ce qui équivaut à démontrer l'identité

$$\frac{1}{p} \binom{p}{i} \binom{p}{j+1} \underline{\binom{n-p-1}{i-1} \binom{n-p}{j}} = \sum_{(u,v)} \binom{p+v}{i+j} \underline{\binom{n-p+u-1}{i+j-1}} \frac{1}{i} \underline{\binom{i}{u}} \binom{i}{v+1} \underline{\binom{j-1}{u-1}} \binom{j}{v}. \tag{3}$$

Il est commode, pour conduire le calcul, de se servir de la formule

$$\binom{z}{\alpha} \binom{z-1}{\beta} = \sum_{\lambda} \binom{\alpha-1}{\lambda} \binom{\beta+1}{\lambda+1} \binom{z+\lambda}{\alpha+\beta}, \tag{4}$$

qui est elle-même facile à déduire de la formule bien connue (cf. [5], p. 15):

$$\binom{z}{\alpha} \binom{z}{\beta} = \sum_{\lambda} \binom{\alpha}{\lambda} \binom{\beta}{\lambda} \binom{z+\lambda}{\alpha+\beta}.$$

Pour sommer par rapport à u le produit des termes soulignés au 2ème membre de (3), on applique la formule (4) avec $z = n-p$, $\alpha = j$, $\beta = i-1$ et $\lambda = u-1$ ce qui fournit $\binom{n-p-1}{i-1}\binom{n-p}{j}$, c'est-à-dire précisément la partie soulignée au 1er membre de (3). Il reste alors à vérifier que

$$\frac{1}{i} \sum_{v} \binom{p+v}{v+j} \binom{i}{v+1} \binom{j}{v} = \frac{1}{p} \binom{p}{i} \binom{p}{j+1},$$

ce qui résulte à nouveau de la formule (4) appliquée cette fois avec $z = p$, $\alpha = j+1$, $\beta = i-1$ et $\lambda = v$. L'identité (3) est ainsi établie, et l'on sait définitivement que

$$D(n, p, i, j) = \frac{1}{p} \binom{p}{i} \binom{p}{j+1} \binom{n-p-1}{i-1} \binom{n-p}{j}.$$

Note

Le referee de cet article indique la possibilité de démontrer plus brièvement le résultat ci-dessus, en utilisant les idées de N. Dershowitz et S. Zaks, dans 'Enumeration of ordered trees', *Disc. Math.* **31** (1980), 9-28, notamment le 'cycle lemma' de Dvoretzky-Motzkin. Nous lui sommes reconnaissants de ses remarques et le renvoyons à un prolongement de ce travail, destiné à paraître dans les Actes du Colloque de Combinatoire Enumérative de l'Université du Québec à Montréal (mai-juin 1985), sous le titre 'Joint distributions of three descriptive parameters of bridges'.

REFERENCES

[1] L. Comtet, *Analyse Combinatoire* (2 vol.), Presses Univ. Fr., Paris, 1970.
[2] G. Kreweras, Sur les éventails de segments, *Cahiers du BURO,* **15** (1970).
[3] G. Kreweras and P. Moszkowski, A new enumerative property of the Narayana numbers, *J. of Statistical Planning and Inference* (1) **14** (1986), 63-67.
[4] T. V. Narayana, Sur les treillis . . . , *C.R. Ac. Sc. Paris,* **240** (1955), 1188.
[5] J. Riordan, *Combinatorial Identities,* Wiley, New York, 1968.

GERMAIN KREWERAS
Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)
et
YVES POUPARD
Université Panthéon-Sorbonne (Paris I)